Université Paul Sabatier
Licence STS – Parcours PC
Physique - L1

Thème 3 – Chute des corps avec frottement visqueux
et phénomènes physiques équivalents
2009–2010, durée : 3 h

A – Question de cours

On s'intéresse à la chute d'une masselotte (de masse m) ayant une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_z$ (où $\vec{e}_z$ est la verticale ascendante), soumise à son poids $\overrightarrow{P} = m\vec{g}$ et à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$, $\vec{v}$ désignant la vitesse de la masselotte par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$.
– Établir l'équation caractéristique pour la vitesse ;
– Chercher $v(t)$ solution de l'équation différentielle du mouvement ;
– Représenter soigneusement, sur un graphe, la solution de cette équation différentielle. On fera apparaître, en particulier, la pente à l'origine, le temps caractéristique τ (on donnera un exemple physique de ce paramètre) et la limite quand $t \to \infty$.

B – Problèmes

I – Datation de corps organiques par le carbone 14
à faire à la maison

Un isotope radioactif du carbone, le carbone 14, sert de traceur radioactif et permet la datation des corps organiques. *[Cette méthode fut introduite par le physicien William Franck (1908 – 1980)].* Il a été prouvé qu'une matière radioactive se désintègre spontanément au cours du temps : elle perd par unité de temps, une proportion constante de sa masse. Soit $m(t)$, la masse radioactive présente à l'instant t, elle obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dm}{dt}(t) = -\lambda m \qquad (1)$$

1) Qu'est-ce qu'un isotope ?
2) Donner la dimension physique de λ.
3) Chercher la solution de l'équation différentielle. Sachant qu'à l'instant $t = 0$, $m = m_0$, déduire l'expression de $m(t)$ en fonction de λ, t et de m_0.
4) On nomme « période radioactive » (ou « demi-vie »), le temps T nécessaire pour que la masse d'une substance radioactive qui se désintègre, soit diminuée de moitié. Établir la relation entre T et λ.
5) Sachant que la période radioactive du carbone 14 est de 5568 ans, déterminer la valeur de la constante λ.
6) Les ossements d'un homme préhistorique, analysés aujourd'hui au carbone 14, montrent qu'il ne reste que 0,0021 % de la proportion contenue habituellement dans un être vivant. A quelle époque a-t-il vécu ? Que vous inspire le résultat obtenu ?

NB : Pour en savoir plus sur la datation par le carbone 14, consulter :
`http ://carbon14.univ-lyon1.fr/intro.htm`.

II – Expérience de Millikan
Mesure de la charge de l'électron

On observe la chute de gouttelettes de glycérine assimilées à des sphères de rayon r, de masse m entre deux plaques métalliques séparées d'une distance $d = 6$ mm. La force de frottement visqueux due à l'air qui s'exerce sur chaque gouttelette est : $\mathbf{F}_f = -\alpha \mathbf{v}$, où $\alpha = 6\pi\eta_{\text{air}} r$ avec $\eta_{\text{air}} = 1{,}8 \times 10^{-5}$ SI et v est la vitesse de la gouttelette par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. On tiendra compte de la poussée d'Archimède. Le mouvement d'une gouttelette obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = a \qquad \text{avec } \frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{m} \text{ et } a = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) g \tag{2}$$

où $g = 9{,}81$ SI., v est la projection de la vitesse suivant $\mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_z$ est la verticale descendante), et ρ et ρ_a sont les masses volumiques de l'huile et de l'air respectivement.

1) On donne $\rho = 810\ \text{kg.m}^{-3}$ et $\rho_a = 1{,}29\ \text{kg.m}^{-3}$. Évaluer la durée caractéristique τ pour un rayon $r = 2\ \mu$m de la gouttelette. Commenter le résultat obtenu.
2) Montrer que la vitesse de la gouttelette atteint très rapidement une valeur limite v_{lim} que l'on exprimera en fonction de g, τ, ρ et ρ_a puis en fonction de g, ρ, ρ_a, r et η_{air}. Justifier le signe de v_{lim}. Application numérique : Calculer v_{lim}.
3) A partir de la mesure de v_{lim}, il est donc possible de déterminer le rayon de la gouttelette. Exprimer ce dernier en fonction de v_{lim}, g, ρ, ρ_a et η_{air}.
4) On applique maintenant un champ électrique $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$. Parmi les gouttelettes pulvérisées entre les plaques, certaines peuvent se charger électriquement. Quelle est alors la force qui s'exerce sur une particule portant une charge q ?
5) En appliquant la loi fondamentale de la dynamique et en la projetant suivant $\mathbf{e}_z$, montrer que le mouvement des gouttelettes ainsi chargées et soumises au champ électrique $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$ (avec $E > 0$), est décrit par l'équation :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = a' \qquad \text{avec } \frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{m} \text{ et } a' = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) g + \frac{qE}{m} \tag{3}$$

(NB : q est une valeur algébrique)
6) Que devient alors la vitesse limite v_{lim2} des gouttelettes en présence du champ électrique ? (on donnera son expression en fonction de q, E, η_{air}, r et v_{lim}). Quel est l'effet de E sur le mouvement de la gouttelette ?
7) Montrer que pour un champ électrique donné $E = E_{\text{seuil}}$, il existe une charge q portée par la gouttelette telle que cette dernière reste en suspension entre les armatures du condensateur. Vous exprimerez q en fonction de ρ, ρ_a, m, g et E_{seuil}.
8) Détermination de la charge élémentaire.
La méthode expérimentale consiste à mesurer la ddp U_{seuil} pour laquelle une gouttelette reste immobile et à mesurer ensuite la vitesse de chute limite dans l'espace sans champ électrique v_{lim}. La connaissance de ces deux données permet de déterminer la charge q portée par les gouttelettes. Montrez que cette charge peut s'exprimer en fonction de v_{lim} et de U_{seuil} suivant la relation :

$$qU_{\text{seuil}} = K(v_{\text{lim}})^{3/2}$$

avec $U_{\text{seuil}} = E_{\text{seuil}} d$ (on supposera un champ uniforme entre les deux plaques) Déterminez K en fonction de d, η_{air}, ρ, ρ_a et g. Donner sa valeur numérique dans le système S.I.
9) Au cours de l'expérience, on a relevé les tensions seuils et les vitesses limites consignées dans le tableau suivant. Complétez ce dernier.

Mesure	1	2	3	4	5	6
U_{seuil} (V)	213	187	73	113	113	221
v_{lim} (μm.s^{-1})	62,44	58,33	14,60	19,86	31,53	77,76
r (μm)						
q (10^{-19} C)						

Montrer que ces mesures mettent en évidence l'existence d'une charge élémentaire dont on donnera la valeur.

NB : Le physicien américain Robert Andrews Millikan (1868–1953), montra ainsi en 1907 que les charges portées par les gouttelettes d'huile étaient toujours des multiples d'une même charge élémentaire :

$$e = 1{,}602189 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

Pour ces résultats, mais aussi pour ses travaux sur l'effet photoélectrique, il reçut le prix Nobel de Physique en 1923.

III – Charge d'un condensateur sous tension constante

On souhaite étudier la charge d'un condensateur sous tension constante. Pour cela, on réalise un montage avec une résistance $R = 11$ MΩ, un condensateur de capacité $C = 4{,}7$ μF et une pile de force électromotrice $E = 4$ V et de résistance interne r ($r \ll R$) (cf. FIG. 1).

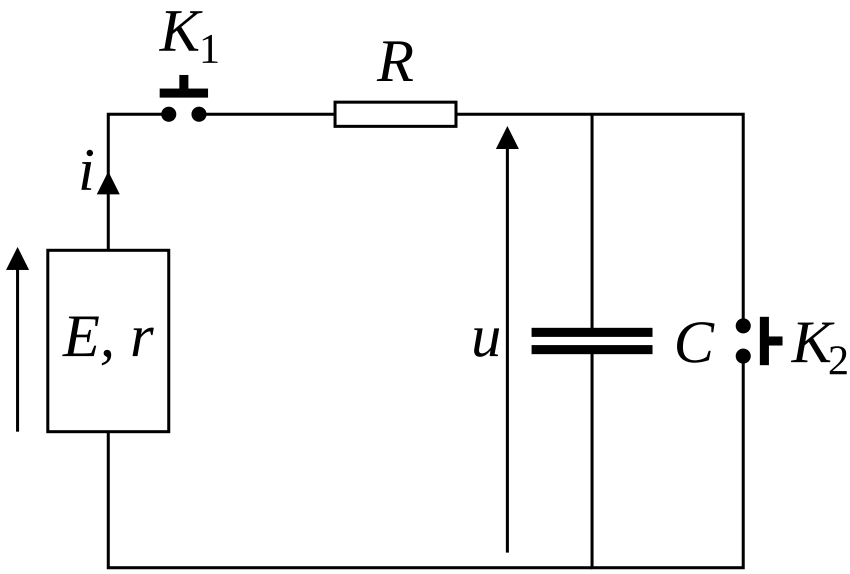

FIG. 1 – Schéma du montage permettant de réaliser la charge du condensateur. Pendant la charge, l'interrupteur K_1 est fermé, et K_2 est ouvert.

Soit u la tension aux bornes du condensateur.

1) Montrer que l'évolution de u au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = a \tag{4}$$

où a et τ sont des constantes que l'on exprimera en fonction de E, R et C.

2) Quelles sont les unités de a et de τ ?
3) Donner l'expression générale de la solution $u(t)$ de cette équation différentielle.
4) Sachant qu'à $t = 0$, le condensateur est initialement déchargé ($q(t = 0) = 0$) déterminer la solution $u(t)$.
5) Représenter le graphe $u(t)$.
6) Application numérique : Évaluer la constante de temps τ du circuit. En déduire, le temps au bout duquel le condensateur sera chargé.